ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.Να λύσετε την εξίσωση: $\begin{vmatrix} x-3 & 4 \\ x-1 & x+3 \end{vmatrix}=0$

Λύση:

$\begin{vmatrix} x-3 & 4 \\ x-1 & x+3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)-4(x-1)=0 \Leftrightarrow x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή x=5

2.Να λυθεί το σύστημα : $\begin{Bmatrix} 3x-y=1 \\ x+2y=5 \end{Bmatrix}$

Λύση: Βρίσκουμε τις ορίζουσες

$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-1\cdot(-1)=6+1=7$

$D_x=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot 2-5\cdot(-1)=2+5=7$

$D_y=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot 5-1\cdot 1=15-1=14$

Ε*πειδή* $D\neq 0$ τότε $x=\frac{D_x}{D}=\frac{7}{7}=1$ και $y=\frac{D_y}{D}=\frac{14}{7}=2$

3.Να λυθεί το σύστημα : $\begin{Bmatrix} 2x-3y=2 \\ 4x-6y=4 \end{Bmatrix}$

Λύση: Βρίσκουμε τις ορίζουσες:

$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}=2\cdot(-6)-4\cdot(-3)=-12+12=0$

$D_x=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}=2\cdot(-6)-4\cdot(-3)=-12+12=0$

$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-2\cdot 4=8-8=0$

Ε*πειδή* $D=D_x=D_y=0$ άρα το σύστημα είναι αόριστο ή

έχει άπειρες λύσεις της μορφής $2x-3y=2 \Leftrightarrow x=\frac{2+3y}{2}$

4. Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} -4x+2y=5 \\ 6x-3y=-2 \end{cases}$

Λύση: Βρίσκουμε τις ορίζουσες:

$$D=\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}=(-4)\cdot(-3)-2\cdot 6=12-12=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=5\cdot(-2)-2\cdot 6=-10-12=-22\neq 0$$

Επειδή D=0 και $D_x \neq 0$ άρα το σύστημα είναι αδύνατο

5.Για τις διάφορες τιμές του λ να λυθεί το σύστημα:
$\begin{cases} 2x+\lambda x=\lambda-2 \\ \lambda x+2y=4\lambda-8 \end{cases}$

Λύση :Βρίσκουμε τις ορίζουσες:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{vmatrix}=4-\lambda^2=(2-\lambda)(2+\lambda)$$

$$D_x=\begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda \\ 4\lambda-8 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot(\lambda-2)-\lambda(4\lambda-8)=(\lambda-2)(2-4\lambda)=2(\lambda-2)(1-2\lambda)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & \lambda-2 \\ \lambda & 4\lambda-8 \end{vmatrix}=2\cdot(4\lambda-8)-\lambda(\lambda-2)=(\lambda-2)(8-\lambda)$$

Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(2+\lambda)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 2$ και $\lambda\neq -2$ τότε:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{2(\lambda-2)(1-2\lambda)}{(2-\lambda)(2+\lambda)}=-2\frac{(1-2\lambda)}{(2+\lambda)}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{(\lambda-2)(8-\lambda)}{(2-\lambda)(2+\lambda)}=-\frac{(8-\lambda)}{(2+\lambda)}$$

Αν λ=-2 τότε $D=D_x=D_y=0$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο

Αν λ=2 τότε D=0 και $D_x\neq 0$ άρα το σύστημα είναι αόριστο , δηλαδή

το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} 2x+2y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x+2y=0 \Leftrightarrow x+y=0$

άρα οι λύσεις είναι της μορφής y=-x δηλαδή όλα τα ζευγάρια της μορφής (μ,-μ) με $\mu\in\mathbb{R}$.

6.Να βρείτε τις τιμές των λ,μ ώστε τα συστήματα:

$$\begin{cases}\lambda x+\mu y=1\\ 2x+\lambda y=2\end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases}2x+(\lambda+\mu)y=-1\\ x+(2\mu-\lambda)y=2\end{cases}$$

να είναι συγχρόνως αδύνατα.

ΛΥΣΗ

Για να είναι συγχρόνως αδύνατα πρέπει: $D_1=0$ και $D_2=0$

Είναι :

$$D_1=\begin{vmatrix}\lambda & \mu\\ 2 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\mu \quad \text{και} \quad D_2=\begin{vmatrix}2 & \lambda+\mu\\ 1 & 2\mu-\lambda\end{vmatrix}=3\mu-3\lambda$$

Τότε:

$$\begin{cases}D_1=0\\ D_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\lambda^2-2\mu=0\\ 3\mu-3\lambda=0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\mu^2-2\mu=0\\ \lambda=\mu\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\mu(\mu-2)=0\\ \lambda=\mu\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\lambda=\mu=0\\ \lambda=\mu=2\end{Bmatrix}$$

Για μ=0 και λ=0 τα συστήματα γίνονται :

$$\begin{Bmatrix}0x+0y=1\\ 2x+0y=2\end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{Bmatrix}2x+0y=-1\\ x+0y=2\end{Bmatrix}$$

τα οποία είναι αδύνατα.

Για μ=2 και λ=2 τα συστήματα γίνονται :

$$\begin{Bmatrix}2x+2y=1\\ 2x+2y=2\end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{Bmatrix}2x+4y=-1\\ x+2y=2\end{Bmatrix}$$

τα οποία είναι αδύνατα.

Τελικά για (λ=0 ,μ=0) και (λ=2 , μ=2) τα συστήματα είναι συγχρόνως αδύνατα.

7.Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους x,y , έχει μοναδική λύση και ισχύει :

$2D_x+3D_y=2D$ και $2D_x+D_y=-4D$

Να βρείτε την μοναδική λύση του συστήματος.

Λύση:

Αφού το σύστημα έχει μοναδική λύση θα ισχύει ότι $D\neq 0$. Διαιρώ με D

οπότε έχω :

$$\bullet 2D_x+3D_y=2D\Leftrightarrow 2\frac{D_x}{D}+3\frac{D_y}{D}=\frac{2D}{D}\Leftrightarrow 2x+3y=2$$

$$\bullet 2D_x+D_y=-4D\Leftrightarrow 2\frac{D_x}{D}+\frac{D_y}{D}=\frac{-4D}{D}\Leftrightarrow 2x+y=-4$$

Λύνοντας το σύστημα πολλαπλασιάζω την δεύτερη εξίσωση με -1 και έχω: $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ -2x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow 2y=6 \Leftrightarrow y=3$

$Αντικαθιστώντας$ έχω: x=-$\frac{7}{2}$

8.Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x,y ισχύει:
$D^2+D_x^2+D_y^2=4D+2D_x-5$

i)Να δείξετε ότι : $(D-2)^2+(D_x-1)^2+D_y^2=0$

ii)Να βρείτε τα x,y.

ΛΥΣΗ

i)Η δοθείσα ισότητα ισοδύναμα γράφεται :

$D^2+D_x^2+D_y^2=4D+2D_x-5 \Leftrightarrow D_x^2-2D_x+1+D^2-4D+4+D_y^2=0 \Leftrightarrow$

$(D_x-1)^2+(D-2)^2+D_y^2=0$

ii) $(D_x-1)^2+(D-2)^2+D_y^2=0 \Leftrightarrow \left(D_x-1=0 \text{ και } D-2=0 \text{ και } D_y=0\right) \Leftrightarrow$

$D_x=1$ και D=2 και $D_y=0$

Η λύση του συστήματος είναι η : $x=\frac{D_x}{D}=\frac{1}{2}$, y=$\frac{D_y}{D}=\frac{0}{2}=0$

9. (Τράπεζα Θεμάτων) Δύο φίλοι , ο Μάρκος και ο Βασίλης , έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια και ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από τον Βασίλη.

Α) Μπορούμε να υπολογίσουμε την ηλικία του καθενός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Β)Δίνεται επιπλέον η πληροφόρηση ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια . Να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός.

ΛΥΣΗ

Α)Έστω x η ηλικία του Μάρκου και y η ηλικία του Βασίλη.
Εφόσον έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια ισχύει : x+y=27.
Και επειδή ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από το Βασίλη ισχύει x>y.
Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την ηλικία του καθενός με μοναδικό τρόπο, διότι υπάρχουν πολλά ζεύγη τιμών που επαληθεύουν τις παραπάνω σχέσεις.

Β)Εφόσον η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια ισχύει: x+y=5.

Λύνουμε το σύστημα και έχουμε:

$\begin{cases} x+y=27 \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow 2x=32 \Leftrightarrow x=16. Άρα$ y=27-16=11

10.(Τράπεζα Θεμάτων) Ένα θέατρο έχει 25 σειρές καθισμάτων χωρισμένες σε δύο διαζώματα. Η κάθε μια από τις σειρές του κάτω διαζώματος έχει 14 καθίσματα και η κάθε μια από τις σειρές του πάνω διαζώματος έχει 16 καθίσματα, ενώ η συνολική χωρητικότητα του θεάτρου είναι 374 καθίσματα.
Α)Αν x ο αριθμός σειρών του κάτω και yο αριθμός του πάνω διαζώματος , να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα δύο εξισώσεων.
Β)Πόσες σειρές έχει το πάνω και πόσες το κάτω διάζωμα;

ΛΥΣΗ

Α)Εφόσον έχει 25 σειρές ισχύει : x+y=25 και αφού έχει 375 καθίσματα , ισχύει: 14x+16y=374.

Άρα έχουμε το σύστημα: $\begin{cases} x+y=25 \\ 14x+16y=374 \end{cases}$

Β)Λύνοντας το παραπάνω σύστημα , έχουμε:

$\begin{cases} x+y=25 \\ 14x+16y=374 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14x-14y=-350 \\ 14x+16y=374 \end{cases} \Leftrightarrow 2y=24 \Leftrightarrow y=12$

Άρα y=25-12=13

11. (Τράπεζα Θεμάτων) Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (\lambda-1)x+2y=3 \\ 4x+(\lambda-1)y=-6 \end{cases}$

Α)Αν λ=-3 , να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε μια λύση.
Β)Αν λ=3 , να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο .
Γ)Αν λ=0 , να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε.

ΛΥΣΗ

Α) Αν λ=-3 έχουμε:

$$\begin{cases}-2x+2y=3\\4x-4y=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+2y=3\\2x-2y=-3\end{cases}\Leftrightarrow 0x+0y=0$$

Οπότε 2x-2y=-3 $\Leftrightarrow$ x=$\dfrac{-3+2y}{2}$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $\left(\dfrac{-3+2\kappa}{2},\kappa\right)$ με $\kappa\in\Re$.

Για κ=0 έχουμε: $\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$

Β)Αν λ=3 , έχουμε:

$$\begin{cases}4x+2y=3\\4x+2y=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2y=3\\-4x-2y=6\end{cases}\Leftrightarrow 0x+0y=9$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Γ)Αν λ=0 , έχουμε:

$$\begin{cases}x+2y=3\\4x-y=-6\end{cases}$$

$D=\begin{vmatrix}1 & 2\\4 & -1\end{vmatrix}=-1-8=-9\neq 0$ άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση

$D_x=\begin{vmatrix}3 & 2\\-6 & -1\end{vmatrix}=-3+12=9$ $\qquad$ $D_y=\begin{vmatrix}1 & 3\\4 & -6\end{vmatrix}=-6-12=-18$

Οπότε: $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{9}{-9}=-1$ και $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-18}{-9}=2$

12.(Τράπεζα Θεμάτων) Δίνονται οι ευθείες

$\varepsilon_1:\lambda x+y=1$ και $\varepsilon_2: x+\lambda y=\lambda^2$

Α)να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι δύο ευθείες τέμνονται και να γράψετε τις συντεταγμένες του κοινού συναρτήσει του λ.

Β)Για ποια τιμή του λ οι δύο ευθείες είναι παράλληλες;

Γ)Αν οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ ταυτίζονται , να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\lambda x+\lambda^2 y=\lambda^3$ και $2x+2\lambda y=\lambda^2-1$ είναι παράλληλες.

ΛΥΣΗ

Α)Για να τέμνονται οι ευθείες θα πρέπει το σύστημα να έχει μοναδική λύση, δηλαδή $D\neq 0$.

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq \pm 1$$

Έχουμε $D_x=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \lambda^2 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda-\lambda^2=-\lambda(\lambda-1)$

$$D_y=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda^2\end{vmatrix}=\lambda^3-1=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$$

Άρα το κοινό σημείο έχει συντεταγμένες:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)}=-\frac{\lambda}{\lambda+1}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)}=\frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+1}$$

Β)Για να είναι οι ευθείες παράλληλες θα πρέπει το σύστημα να είναι αδύνατο, δηλαδή

$$\left\{\begin{matrix}D=0\\ D_x\neq 0\\ ή\\ D_y\neq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\lambda=\pm 1\\ \lambda\neq 1\\ \lambda\neq 1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \lambda=-1$$

Γ)Εφόσον οι ευθείες ταυτίζονται το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή $D=D_x=D_y=0\Leftrightarrow \lambda=1$

Για λ=1 έχουμε : $\left\{\begin{matrix}x+y=1\\ 2x+2y=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x+y=1\\ -x-y=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow 0x+0y=1$ Αδύνατο.

13.Να λύσετε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases}x-3y+z=-1\\ x+y+z=6\\ 3x-y-z=-2\end{cases}$$

Λύση:

Κάνουμε μέθοδο αντίθετων συντελεστών 1η – 2η και 1η - 3η εξίσωση στον άγνωστο z.

$$\begin{cases}2x-3y+z=-1\,|(-1)\\ x+y+z=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+3y-z=1\\ x+y+z=6\end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:
$-x+4y=7 \quad (1)$

$$\begin{cases} 2x-3y+z=-1 \\ 3x-y-z=-2 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη :
$5x-4y=-3 \quad (2)$
Κάνοντας μέθοδο αντίθετων συντελεστών στα (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{cases} -x+4y=7 \\ 5x-4y=-3 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε :

$$4x=4 \Leftrightarrow x=1$$

Αντικαθιστώντας έχουμε : y=2 και z=3

14. Να βρείτε δύο αριθμούς που το άθροισμα τους είναι 13 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 89.

ΛΥΣΗ
Έστω x,y οι ζητούμενοι αριθμοί τότε προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} x+y=13 & (1) \\ x^2+y^2=89 & (2) \end{cases}$$

Επιλύουμε την (1) ως προς έναν άγνωστο, π.χ ως προς x και αντικαθιστούμε στην (2).
Έτσι έχουμε

$$x+y=13 \Leftrightarrow y=13-x \qquad (3)$$

Οπότε η (2) με την βοήθεια της (3) γίνεται :

$$x^2+(13-x)^2=89 \Leftrightarrow x^2+169-26x+x^2=89 \Leftrightarrow 2x^2-26x+80=0$$

Λύνοντας την παραπάνω δευτεροβάθμια βρίσκουμε δύο λύσεις

$$x_1=8 \quad , \; x_2=5$$

Οπότε για x=8 έχουμε y=5 , ενώ για x=5 έχουμε y=8. Άρα το σύστημα έχει δύο λύσεις τις (8,5) και (5,8)

15.Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 2x+y=11 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Θα λύσουμε την γραμμική εξίσωση ως προς y.

$2x+y=11 \Leftrightarrow y=11-2x$ και την αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση και βρίσκουμε :

$$x^2+(11-2x)^2=25 \Leftrightarrow x^2+121-44x+4x^2=25 \Leftrightarrow 5x^2-44x+96=0 \Leftrightarrow$$

$x=4$ ή $x=\frac{24}{5}$

Για x=4 έχουμε $y=11-2\cdot 4=3$

Για $x=\frac{25}{4}$ έχουμε $y=11-2\cdot\frac{24}{5}=\frac{7}{5}$

Άρα οι λύσεις είναι (4,3) και $\left(\frac{24}{5},\frac{7}{5}\right)$

16.Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x^2+3y^2=14 \\ 5x^2-2y^2=-3 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $x^2=\kappa$ και $y^2=\lambda$ οπότε το σύστημα γράφεται :

$$\begin{cases} 2\kappa+3\lambda=14 \\ 5\kappa-2\lambda=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\kappa+6\lambda=28 \\ 15\kappa-6\lambda=-9 \end{cases}$$ Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$19\kappa=19 \Leftrightarrow \kappa=1$. Για κ=1 έχουμε λ=4 .Αντικαθιστώντας έχουμε:

$x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm1$ και $y^2=4 \Leftrightarrow y=\pm2$ Άρα το σύστημα έχει λύσεις :

$(1,2)$, $(-1,2)$, (1,-2) , (-1,-2)

17. Να βρείτε δύο αριθμούς που το άθροισμα τους είναι 13 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 89.

ΛΥΣΗ

Έστω x,y οι ζητούμενοι αριθμοί , οπότε προκύπτει το σύστημα :

$x+y=13$ (1)

$x^2+y^2=89$ (2)

Σε αυτή την περίπτωση επιλύουμε την (1) ως προς έναν άγνωστο π.χ τον x και αντικαθιστούμε στη (2).

Έχουμε :
$$x+y=13 \Leftrightarrow y=13-x$$
$$x^2+(13-x)^2=89 \Leftrightarrow x^2+169-26x+x^2=89 \Leftrightarrow 2x^2-26x+80=0$$

και λύνοντας την δευτεροβάθμια έχουμε :
$x=8$ ή x=5.

Aν x=8 έχουμε y=5 , ενω αν x=5 έχουμε y=8.

18. Να λύσετε το σύστημα :
$$\frac{5}{x}+\frac{2}{y}=19$$
$$\frac{2}{x}-\frac{5}{y}=-4$$

ΛΥΣΗ

Το αρχικό σύστημα γράφεται :
$$5\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{y}=19$$
$$2\cdot\frac{1}{x}-5\frac{1}{y}=-4$$

Θέτουμε :
$\frac{1}{x}=\alpha$ και $\frac{1}{y}=\beta$ άρα το σύστημα γίνεται :
$$\left\{\begin{matrix}5\alpha+2\beta=19\\ 2\alpha-5\beta=-4\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}-10\alpha-4\beta=-38\\ 10\alpha-25\beta=-20\end{matrix}\right\}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε : $-29\beta=-58 \Leftrightarrow \beta=2$

Για β=2 έχουμε : α=3

Αντικαθιστούμε και έχουμε : $\frac{1}{x}=3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{y}=2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$

Άρα το σύστημα έχει λύση το ζεύγος $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & x \\ 0 & x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{vmatrix}$$

2.Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\begin{vmatrix} y & 3 \\ y-1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2y-1 & y+2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

3. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} 3x-1 & 3 \\ x+2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & x+1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$|3x+2y-12|+|4x-3y+1|=0 \qquad |2x+3y-2|+|x+2y+3|=0$$

5.Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x+4y=33 \\ 5x+2y=41 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x+8y=-61 \\ -3x+4y=-11 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+4y=-7 \\ 9x+y=109 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x-3y=23 \\ x+2y=13 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-y=1 \\ x+2y=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x+2y=5 \\ 6x-3y=-2 \end{cases}$$

6. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{cases} 2(x+1)-3y=3 \\ x-2(y-2)=3x+6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1-3(y-x) \\ y=2x+3(y-x) \end{cases}$$

7.Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{cases} \left(2-\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{3}y=4 \\ -\sqrt{3}x+\left(2+\sqrt{3}\right)y=2-\sqrt{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\sqrt{2}-1\right)x+2\sqrt{2}y=-2 \\ \sqrt{2}x+\left(\sqrt{2}+1\right)y=\sqrt{2-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x-\sqrt{2}y=2 \\ \sqrt{3}x-\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)y=6 \end{cases}$$

8. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=3 \\ x-4y=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y+1}{8}=\frac{3}{2} \\ \frac{x-1}{3}-\frac{y}{2}=\frac{9}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x-3}{y+2}=-\frac{2}{3} \\ \frac{y+1}{x+5}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x}{3}-4-\frac{y}{2}+x=8-\frac{3y}{4}+\frac{1}{12} \\ \frac{y}{6}-\frac{x}{2}+2=\frac{1}{6}-2x+6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{8\alpha-5\beta}{12}=-\frac{21}{4} \\ 2\alpha+\frac{\beta}{7}=-9 \end{cases}$$

9.Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3}+\frac{2y+1}{5}=-1 \\ \frac{7y-2}{4}+x=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3x+2}{5}+2\cdot\frac{y+4}{3}=\frac{5}{3} \\ \frac{4x+5}{3}-4=\frac{y+1}{2} \end{cases}$$

10.Να λύσετε τα συστήματα:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{5}-2\right)x+y+2=\sqrt{5} \\ x+\left(\sqrt{5}-2\right)y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\sqrt{3}+2\right)x+2y=6\sqrt{3}+3 \\ 3x+\left(\sqrt{3}-2\right)y=13-\sqrt{3} \end{cases}$$

11. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{cases} \frac{(x+3)^2+(y-8)^2}{x^2+y^2+39}=1 \\ \frac{2x+3y+8}{5x+4y-1}=\frac{3}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x-1}{x+15}=\frac{y-6}{y+2} \\ \frac{x-3}{x}=\frac{y-4}{y-1} \end{cases}$$

12. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα Α και Β όταν Α(-1,1) και $B\left(\frac{1}{2},0\right)$

13. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=\frac{5}{3} \\ \frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x+y}{5}=\frac{x-y}{3} \\ \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=\frac{y+2}{2} \end{cases}$$

14. Να λυθούν τα παραμετρικά συστήματα:

$$\begin{cases} mx+4y=2 \\ x+my=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (m-1)x+8y=4 \\ x+(m+1)y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (m+1)x+8y=4m \\ mx+(m+3)y=3m-1 \end{cases}$$

15. Να λυθούν τα παραμετρικά συστήματα:

$$\begin{cases} mx+y=2 \\ x+y=2m \end{cases} \qquad \begin{cases} mx-2y=m \\ (m-1)x-y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+(3m-1)y=0 \\ x+2y=m-4 \end{cases}$$

16. Να λυθούν τα παραμετρικά συστήματα

$$\begin{cases} \lambda^2 x-\lambda y=2 \\ \lambda x-\lambda y=2\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x+(\lambda+1)y=0 \\ 2\lambda x+8y=0 \end{cases}$$

17. Να λυθεί το παραμετρικό σύστημα:

$$\begin{cases} mx+(m+1)y=3m+2 \\ 2x+(2m-1)y=8 \end{cases} \qquad \begin{cases} (m+2)x+(m-7)y=7 \\ 4x-5y=m+8 \end{cases}$$

18.Να λυθεί το παραμετρικό σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x+2y=\lambda+2 \\ (2\lambda-1)x+(\lambda+1)y=2(\lambda+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda(x+1)=y+1 \\ 4x=\lambda(y-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-\lambda(1-y)=0 \\ x+y+1=2\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y=4\lambda+\mu \\ 2x+y=3\lambda+2\mu \end{cases}$$

19. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x=-4(y-2) \\ \lambda x=4-x \end{cases}$$

είναι αδύνατο.

20.Να βρείτε για ποια τιμή του λ το σύστημα

$$\begin{cases} y-\lambda(x-1)=1 \\ \lambda(\lambda x-1)=2y \end{cases}$$

έχει άπειρες λύσεις.

21.Να αποδείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} 2(\mu+3)x+(\mu-2)y=\mu+3 \\ (\mu+5)x+(\mu-1)y=\mu \end{cases}$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματική τιμή της παραμέτρου μ.

22.Να αποδείξετε ότι το σύστημα :

$$\begin{cases} \lambda x-y=2\lambda+3 \\ x+\lambda y=2-3\lambda \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση για κάθε λ , η οποία είναι ανεξάρτητη του λ.

23.Για ποιες τιμές των x,yη εξίσωση x-2y+1+λ(x-y)=0 αληθεύει για οποιαδήποτε αριθμό λ.

24. Να βρείτε για τιμή του λ το σύστημα $\begin{cases} x+3y=6 \\ 2x+6y=\lambda \end{cases}$

α)έχει άπειρες λύσεις β) είναι αδύνατο.

25. Να βρείτε για ποιες τιμές του α το σύστημα $\begin{cases} \alpha x+ay=1 \\ x+ay=a \end{cases}$

i)έχει μοναδική λύση (x_0,y_0) για την οποία να ισχύει $x_0+y_0=4$

ii)είναι αδύνατο.

26.Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda x-(\lambda+1)y=\lambda-1 \\ (\lambda+2)x-6y=\lambda \end{cases}$.

Να βρείτε για ποια τιμή του λ το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) για την οποία ισχύει ότι: $x_0 \cdot y_0 = 1$

27. Να βρείτε τις τιμές των λ,μ για τις οποίες τα συστήματα:

$(\Sigma_1)\begin{cases} (2\lambda-1)x+10\mu y=3 \\ 2x+4y=5 \end{cases}$ $\quad$ $(\Sigma_2)\begin{cases} (\lambda-1)x-(m-1)y=7 \\ 3x-6y=5 \end{cases}$

είναι συγχρόνως αδύνατα.

28. Να βρεθούν τα α, β ώστε τα συστήματα

$(\Sigma_1)\begin{cases} (\alpha-1)x-\beta y=2 \\ ax+y=0 \end{cases}$ $\quad$ $(\Sigma_2)\begin{cases} x+3y=1 \\ -x+ay=2 \end{cases}$

να είναι συγχρόνως αδύνατα.

29. Δίνονται τα

$\Sigma_1\begin{cases} (\alpha+1)x-\beta y=1 \\ x+y=-1 \end{cases}$ $\quad$ $\Sigma_2\begin{cases} x+(\beta+2)y=a^2+1 \\ x-(a-1)y=\beta^2 \end{cases}$

Να δείξετε ότι αν το πρώτο σύστημα έχει άπειρες λύσεις τότε το δεύτερο είναι αδύνατο.

30.Δίνονται τα συστήματα

$(\Sigma_1)\begin{cases} (\alpha+1)x-\beta y=1 \\ x+y=-1 \end{cases}$ $\quad$ $(\Sigma_2)\begin{cases} x+(\beta+2)y=a^2+1 \\ x-(a-1)y=\beta^3 \end{cases}$

Να δείξετε ότι αν το Σ_1 έχει άπειρες λύσεις , το Σ_2 είναι αδύνατο

31.Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 2x+y=\lambda+2 \\ 3x-2y+\lambda=5 \end{cases}$

Α.Να δείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για κάθε $\lambda \in \Re$
Β.Να υπολογίσετε τα x,y
Γ. Για ποια τιμή του λ η λύση (x,y) που βρήκατε επαληθεύει τη σχέση x+y=5.

32.Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x,y ισχύει:

$D_x + D_y = 9D$

$D_x - D_y = 5D$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση , να βρείτε τη λύση αυτή.

33.Αν σε σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x,y ισχύει

$2D_x + 3D_y = -D$

$-4D_x + 7D_y = -11D$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση , να βρεθεί η λύση αυτή.

34. Αν σε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 ισχύει

$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 2D - 6D_x + 4D_y - 14$

Να λυθεί το σύστημα αυτό.

35.Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,y και

$D^2 + D_x^2 + D_y^2 \le D \cdot D_x + D \cdot D_y + D_x \cdot D_y$ με $\left(\mathrm{D}, \mathrm{D_x}, D_y\right) \ne (0,0,0)$

Να δειχτεί ότι η λύση του (Σ) είναι το ζεύγος (x,y)=(1,1)

36.Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,y το οποίο έχει μοναδική λύση και ισχύει

$\begin{vmatrix} D_x & \mathrm{D} \\ \mathrm{D} & \mathrm{D_y} \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} \mathrm{D_x} & -1 \\ \mathrm{D_y} & 1 \end{vmatrix} = 2D$

Να βρεθεί η λύση του συστήματος.

37. Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,y το οποίο έχει μοναδική λύση και ισχύει $D_x^2 + D_y^2 + 5D^2 \le 2D \cdot \left(D_x + 2D_y\right)$

Να βρεθεί η λύση του συστήματος.

38.Σε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,yισχύει:

$D_x^2 + D_y^2 - 2DD_x - 4DD_y + 5D^2 = 0$ και $\mathrm{D} \ne 0$.Να βρείτε τα x,y

39.Σε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,y ισχύει:

$D_x + D_y = 5D$ και $2\mathrm{D_x} - D_y = D$ και $\mathrm{D} \ne 0$.Να βρείτε τα x,y

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

40. Σε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,y ισχύει:
$D_x^2 + D_y^2 - 2D^2 = 2DD_y - 2DD_x$ και $D \neq 0$.Να βρείτε τα x,y

41. Σε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,y ισχύει:
$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 4D + 2D_x - 5$.Να δείξετε ότι:

$\alpha)\left(D-2\right)^2 + \left(D_x - 1\right)^2 + D_y^2 = 0$

β)Να βρεθούν τα x,y

42.Θεωρούμε το σύστημα $\begin{matrix} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{matrix}$

για το οποίο ισχύει $D = D_x + D_y$

Να δείξετε ότι :

α)Αν το σύστημα είναι ομογενές , τότε έχει και μη μηδενικές λύσεις

β)Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση $\left(x_0, y_0\right)$ τότε

$\alpha) x_0 + y_0 = 1$ β) $x_0^2 - y_0^2 = \dfrac{D_x - D_y}{D}$

γ)Αν επιπλέον ισχύει $x_0^2 - y_0^2 = 3$, να βρείτε τη λύση του συστήματος και στη συνέχεια να δείξετε ότι $D_x + 2D_y = 0$

43.Α.Σε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x,y ισχύουν οι σχέσεις

- $D_x^2 + D_y^2 + D^2 = 2D_xD_y + 2D - 1$
- 3x+y=4

Να αποδείξετε ότι $\left(D_x - D_y\right)^2 + \left(D-1\right)^2 = 0$ και να υπολογίσετε τους xκαι y.

Β.Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 100m.Αν αυξηθούν οι διαστάσεις του κατά 3 μέτρα η μία και κατά 4 μέτρα η άλλη , το εμβαδόν αυξάνεται κατά 170 m^2.Να βρείτε τις διαστάσεις του.

44.Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} (\lambda+1)x + y = \lambda + 3 & (1) \\ 2x + (\lambda+2)y = 6 & (2) \end{cases}$

i)Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \Re$

ii)Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) για την οποία ισχύει $x_0 - y_0 \leq 0$ να αποδείξετε ότι -3<λ<-1

iii)Για λ=0 να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας που παριστάνει η εξίσωση (1) με την υπερβολή : $y = \frac{2}{x}$

45.Σε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων , με αγνώστους xκαι y, ισχύει : $\begin{cases} (\lambda+3)D_x + (\mu-1)D_y = \lambda D \\ \mu D_x + \lambda D_y = (3\lambda - 4\mu)D \end{cases}$

Να βρείτε τους αριθμούς λ , μ αν το σύστημα έχει μοναδική λύση τη $(x, y) = (-5, 1)$

46.Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$f(x) = x^2 + ax + \beta$ διέρχεται από το σημείο Α(-2,-6) και ισχύει ότι:

$\begin{vmatrix} f(-5) & 3 \\ f(1) & -1 \end{vmatrix} = 0$. Να βρείτε:

Α) τους αριθμούς α και β.

Β)τους αριθμούς λ και μ για τους οποίους ισχύει :

$\begin{cases} f(\lambda) - \mu = f(\lambda - 1) \\ 3\lambda + 2\mu = -12 \end{cases}$

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\begin{cases} 3\sqrt{x}-6\sqrt{y}=7 \\ 2\sqrt{x}-4\sqrt{y}=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{x}-2\sqrt{y}=3 \\ 3\sqrt{x}+4\sqrt{y}=-11 \end{cases}$$

2.Να λυθούν τα συστήματα

$$\begin{cases} 3x^2-y^2=2 \\ 8x^2-3y^2=17 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4|x|-2|y|=11 \\ 6|x|-5|y|=15,5 \end{cases}$$

3. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{7}{12} \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=\dfrac{5}{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{-3}{x-7}+\dfrac{5}{y+3}=7 \\ \dfrac{5}{x-7}-\dfrac{4}{y+3}=-3 \end{cases}$$

4. Να λυθούν τα συστήματα

$$\begin{cases} 8x^2-y^2=16 \\ y=2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-2xy+y^2=1 \\ x-2y=2 \end{cases}$$

5.Να λύσετε τα συστήματα:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y=6 \\ |x-y|=8 \end{cases}$$

6.Να λύσετε τα συστήματα:

$$\begin{cases} (y-2x)\cdot(x+y)=0 \\ x-2y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} (3x-2y+3)(4x+y+2)=0 \\ x+y=4 \end{cases}$$

7. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$i)\begin{cases} 3x+2y=2 \\ |x+y|=1 \end{cases} \qquad ii)\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=-\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

8. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{4}{x-2}+\dfrac{6}{2y-5}=1 \\ \dfrac{8}{2-x}-\dfrac{3}{5-2y}=3 \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{6}{x}-\dfrac{8}{y}=1 \end{array}\right\}$$

9. Να λυθούν τα συστήματα:

$$i)\begin{cases} \dfrac{3}{2x}+\dfrac{2}{3y}=5 \\ \dfrac{5}{4y}-\dfrac{7}{6y}=-1 \end{cases} \qquad ii)\begin{cases} 2\sqrt{1-x}+\sqrt{y+13}=7 \\ \sqrt{1-x}-3\sqrt{y+13}=-4 \end{cases}$$

10. Να λυθεί το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y=-3z \\ 3x+8y=14-9z \\ 2x+3y+5z=7 \end{array}\right\}$$

11. Να λυθεί το σύστημα:

$$5x+5y-z=0$$

$$10x+5y+2z=0$$

$$-5x+15y-9z=0$$

12. Να λυθεί το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4} \\ 2x-y+2z=18 \end{array}\right\}$$

13. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=9 \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=3 \end{cases}$

14. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2+y^2+3x-2y=1 \\ x^2+y^2+2x-y=1 \end{cases}$$

15.Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} \sqrt{2x-y}-\sqrt{x+y}=1 \\ x+y+\sqrt{2x-y}=3 \end{cases}$$

16.Δίνεται η ευθεία $y=\lambda x$ και ο κύκλος $x^2+y^2-4x+1=0$. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η ευθεία
α)να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλος
β)να εφάπτεται του κύκλου
γ)να τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία

17.Δίνεται η ευθεία $y=\lambda x-1$ και η παραβολή $y=2x^2$.Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η ευθεία
α)να μην έχει κοινά σημεία με την παραβολή
β)να τέμνει την παραβολή σε ένα σημείο
γ)να τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία.

18.Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} \lambda x+2y=4 \\ 2x+\lambda y=\lambda^2 \end{cases}$$

α.Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \Re$

β.Αν το σύστημα είναι αδύνατο, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $x+y=-2\lambda$ και της υπερβολής $y=\frac{3}{x}$

γ.Αν το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων , να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x-y+z=\lambda-2 \\ \lambda x+y-z=0 \\ x-\lambda y+z=0 \end{cases}$$

19.Σε ένα γκαράζ υπάρχουν συνολικά 50 οχήματα , αυτοκίνητα και μοτοσυκλέτες. Αν όλα τα οχήματα έχουν 164 ρόδες , πόσα αυτοκίνητα και πόσα ποδήλατα υπάρχουν στο γκαράζ;

20.Το άθροισμα δύο ακεραίων είναι 26 , ενώ αν διαιρέσουμε τον μεγαλύτερο με τον μικρότερο βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 1. Να βρείτε τους αριθμούς.

21. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι ίσο με 9. Αν εναλλάξουμε την θέση των ψηφίων , παίρνουμε αριθμό μεγαύτερο κατά 45. Να βρείτε τον διψήφιο αριθμό.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

1. Δίνεται η εξίσωση 8x+2y=7
Α)Να γράψετε μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1)
Β)Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δύο εξισώσεις και με βάση το γράφημα να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

2.Δίνεται το σύστημα : $\left\{\begin{matrix} x-2y=8 \\ ax+\beta y=\gamma \end{matrix}\right\}$ με παραμέτρους $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$
Α)Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει λύση το ζεύγος (2,-3).
Β)Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο.

3. Στο δημοτικό parking μιας επαρχιακής πόλης στις 10 το πρωί , το σύνολο των δίκυκλων και τετράτροχων οχημάτων που έχουν παρκάρει είναι 830 και το πλήθος των τροχών τους είναι 2.700.
Α)Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.
Β) Να βρείτε τον αριθμό των δίκυκλων καθώς και τον αριθμό των τετράχρονων οχημάτων.

4.Δίνεται το σύστημα : $\left\{\begin{matrix} (\lambda+1)x+2y=3 \\ 4x+(\lambda-1)y=-6 \end{matrix}\right\}$
Α) Αν λ=-3 , να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε μια λύση.
Β)Αν λ=3 να αποδείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.
Γ)Αν λ=0 , να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση, την οποία και να προσδιορίσετε.

5. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις:
$\varepsilon_1 : 2x-y=-1$
$\varepsilon_2 : (\lambda-1)x-y=6$
Α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ να είναι παράλληλες.
Β)Να παραστήσετε γραφικά τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ για λ=3.

Γ)Υπάρχει τιμή του λ ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να ταυτίζονται; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

6.Δίνεται το σύστημα : $\begin{Bmatrix} \lambda x + y = 2 \\ \lambda x + \lambda y = \lambda + 1 \end{Bmatrix}$

Α)Να αποδείξετε ότι για τις ορίζουσες D, D_x, D_y του συστήματος ισχύουν:

$D = \lambda(\lambda - 1)$, $D_x = \lambda - 1$, $D_y = \lambda(\lambda - 1)$

Β)Αν είναι $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, να λύσετε το σύστημα

7.Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις:

$x + (\lambda + 2)y = 3$, $(\lambda - 2)x + 5y = 3$

α)Για τις διάφορες τιμές του λ να βρείτε τη σχετική θέση των δύο ευθειών

β)Στην περίπτωση που οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται , να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των δυο ευθειών

γ)Να βρείτε την τιμή λ για την οποία το σημείο Α ανήκει στην ευθεία με εξίσωση : x+2y=3

8.Δίνεται το σύστημα: $\begin{Bmatrix} (\alpha - 1)x + 3y = 3 \\ x + (a + 1)y = 3 \end{Bmatrix}$

με παράμετρο α.

α) Να αποδείξετε ότι αν το σύστημα έχει μοναδική λύση τη (x_0, y_0) τότε $x_0 = y_0$.

β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το σύστημα :

i)έχει άπειρες σε πλήθος λύσεις και να δώσετε τη μορφή τους.

ii)δεν έχει λύση

γ)Να εξετάσετε τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών που προκύπτουν από τις εξισώσεις του προηγούμενου συστήματος για : α=3 , α=2 , α=-2

9. Δίνεται το σύστημα :

$\begin{Bmatrix} 2x - 4y = 1 - \lambda \\ x + 2y = \lambda + 2 \end{Bmatrix}$

α)Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ.

β)Να βρείτε τα x και y συναρτήσει του λ.

γ)Να προσδιορίσετε την τιμή του λ για την οποία οι ευθείες :
$2x-4y=1-\lambda$, x+6y=λ+2 , 16x+16y=19
διέρχονται από το ίδιο σημείο.

10. Δίνονται οι ευθείες : $\varepsilon_1 : \lambda x + y = 1$ και $\varepsilon_2 : x + \lambda y = \lambda^2$

Α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι δύο ευθείες τέμνονται και να γράψετε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου συναρτήσει του λ

Β) Για ποια τιμή του λ οι δύο ευθείες είναι παράλληλες;

Γ)Αν οι ευθείες ταυτίζονται , να αποδείξετε ότι οι ευθείες :
$\lambda x + \lambda^2 y = \lambda^3$ και $2x+2y=\lambda^2-1$
είναι παράλληλες.

11.α.Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} y = x^2+1 \\ x-y=-1 \end{Bmatrix}$$

Β. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος που βρήκατε στο ερώτημα (α).

12.Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:

Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$. Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.

Α)Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

Β)Να βρείτε την ηλικία του καθενός.

13. Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο κορίτσια δίδυμα και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής:

1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14.
2. Το γινόμενο της ηλικίας της μου επί την ηλικία του γιού μου είναι 24.
3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

Α)Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία (1) , (2) , (3) που έδωσε ο Κώστας.

Β)Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα.

14. α)Να λύσετε το σύστημα:

$$(\Sigma_1):\begin{cases} xy=6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$$

Β)Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος (Σ_1) , λύσεις και του:

$$(\Sigma_2):\begin{cases} |xy|=6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Γ) Είναι όλες οι λύσεις του (Σ_2) λύσεις και του (Σ_1); Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.